Lösung: Serie 6

1. Zusammenkleben von stetigen Abbildungen

(a) Wenn $F \subset E'$ abgeschlossen ist, dann sind $f^{-1}(F)$ und $g^{-1}(F)$ abgeschlossen in A respektive B, also auch in E (siehe Serie 2, Aufgabe 7f) weil A, B in $(E, \mathcal{T})$ abgeschlossen sind. Folglich ist (wir benutzen $E = A \cup B$)

$$h^{-1}(F) = (h|A)^{-1}(F) \cup (h|B)^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$$

abgeschlossen; $h : (E, \mathcal{T}) \to (E', \mathcal{T}')$ ist also stetig.
(b) In der Notation von (a) sei $B := (A^o)^c$ und $g : B \to Y$, $x \mapsto g(x) := c$. Beachte dass B abgeschlossen ist, $g \in C(B, Y)$ und $A \cup B = X$. Ausserdem gleichen f und g auf $\partial A = \overline{A} \cap (A^o)^c = A \cap B$ der Konstanten c. Folglich ist h, wie in (a) definiert, stetig. Aber $h = F$, also sind wir fertig.
(c) folgt aus (a).

2. 2-te Homotopiegruppe (Würfel-Klebe Version)

(a) $\gamma_0 \cdot \gamma_1$ ist stetig nach Aufgabe 1, denn $\gamma_0(\cdot, 1) \equiv b \equiv \gamma_1(\cdot, 0)$. Gegeben seien stetige Abbildungen γ_i, γ_i' mit $\gamma_i(R) = \gamma_i'(R) = \{b\}$ $(i = 0, 1)$. Für $i = 0, 1$ nehmen wir an dass $\gamma_i \sim \gamma_i'$, es gibt also eine Homotopie Γ_i von γ_i nach γ_i'. Definiere $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1]^2 \to E$ durch

$$\Gamma(s, x, y) := \begin{cases} \Gamma_0(s, x, 2y) & \text{falls } y \in [0, \frac{1}{2}], \\ \Gamma_1(s, x, 2y - 1) & \text{falls } y \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

für $s, x, y \in [0, 1]$. Γ ist stetig weil $\Gamma_0(\cdot, \cdot, 1) \equiv b \equiv \Gamma_1(\cdot, \cdot, 0)$. Es gilt für alle $s \in [0, 1]$ dass $\Gamma(\{s\} \times R) = \{b\}$ denn $\Gamma_i(\{s\} \times R) = \{b\}$ $(i = 0, 1)$. Weiter haben wir $\Gamma(0, \cdot) = \gamma_0 \cdot \gamma_1$ und $\Gamma(1, \cdot) = \gamma_0' \cdot \gamma_1'$. Also ist Γ eine Homotopie von $\gamma_0 \cdot \gamma_1$ nach $\gamma_0' \cdot \gamma_1'$.
(b) Es ist zu beachten, dass $(\gamma_0 \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2 \neq \gamma_0 \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma_2)$ ist. Die beiden Abbildungen sind jedoch homotop, eine entsprechende Homotopie $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1]^2 \to E$ ist gegeben durch

$$\Gamma(s, x, y) = \begin{cases} \gamma_0\left(x, \frac{y}{\frac{1+s}{4}}\right) & \text{falls } y \in [0, \frac{1+s}{4}], \\ \gamma_1\left(x, \frac{y - \frac{1+s}{4}}{\frac{2+s}{4} - \frac{1+s}{4}}\right) & \text{falls } y \in [\frac{1+s}{4}, \frac{2+s}{4}], \\ \gamma_2\left(x, \frac{y - \frac{2+s}{4}}{1 - \frac{2+s}{4}}\right) & \text{falls } y \in [\frac{2+s}{4}, 1], \end{cases}$$

für $s, x, y \in [0, 1]$. Somit gilt

$$([\gamma_0] \cdot [\gamma_1]) \cdot [\gamma_2] = [(\gamma_0 \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2] = [\gamma_0 \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma_2)] = [\gamma_0] \cdot ([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]),$$

womit die Assoziativität gezeigt ist.

(c) Sei e wie in der Aufgabe gegeben und $\gamma : [0,1]^2 \to E$ stetig mit $\gamma(R) = \{b\}$. Wir wollen zeigen, dass $e \cdot \gamma \sim \gamma \sim \gamma \cdot e$. Die Abbildung

$$\Gamma(s,x,y) = \begin{cases} e\big(x, \frac{2y}{s}\big) & \text{falls } y \in [0, \frac{s}{2}), \\ \gamma\Big(x, \frac{y-\frac{s}{2}}{1-\frac{s}{2}}\Big) & \text{falls } y \in [\frac{s}{2}, 1] \end{cases}$$

ist eine Homotopie von γ nach $e \cdot \gamma$. Analog findet man eine Homotopie von γ nach $\gamma \cdot e$.

(d) Sei $[\gamma] \in \pi_2(E, b)$. Wir definieren

$$\gamma^{-1}(x,y) := \gamma(x, 1-y)$$

und wollen zeigen, dass $\gamma \cdot \gamma^{-1} \sim e$ ist. Die Abbildung

$$\Gamma(s,x,y) = \begin{cases} \gamma(x, 2y) & \text{falls } y \in [0, \frac{s}{2}), \\ e(x,y) & \text{falls } y \in [\frac{s}{2}, 1-\frac{s}{2}], \\ \gamma(x, 2(1-y)) & \text{falls } y \in (1-\frac{s}{2}, 1], \end{cases}$$

ist eine Homotopie von e nach $\gamma \cdot \gamma^{-1}$ und somit ist dies gezeigt.

(e) Es seien $\gamma, \gamma' : [0,1]^2 \to E$ stetige Abbildungen mit $\gamma(R) = \{b\} = \gamma'(R)$. Definiere

$$\sigma : [0,1]^2 \to [0,1]^2, \quad (x,y) \mapsto (1-x, 1-y).$$

Wir stellen fest dass folgendes gilt:

$$\gamma \circ \sigma \sim \gamma \quad \text{und} \quad (\gamma \circ \sigma) \cdot (\gamma' \circ \sigma) = (\gamma' \cdot \gamma) \circ \sigma.$$

Daraus folgt dann sofort mit (a) dass

$$\gamma \cdot \gamma' \sim (\gamma \circ \sigma) \cdot (\gamma' \circ \sigma) \sim [(\gamma \circ \sigma) \cdot (\gamma' \circ \sigma)] \circ \sigma = \gamma' \cdot \gamma.$$

Wir überzeugen uns noch dass $\gamma \sim \gamma \circ \sigma$ gilt. Tatsächlich existiert eine stetige Abbildung $\alpha : [0,1] \times [0,1]^2 \to [0,1]^2$ so dass $\alpha(0,\cdot) = \mathrm{id}$, $\alpha(1,\cdot) = \sigma$, und $\alpha(\{s\} \times R) = R$ für alle $s \in [0,1]$. Grob gesagt kann man sich $\alpha(s,\cdot)$ also eine "eckige" Drehung über dem Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ um den Winkel $s \cdot \pi$ vorstellen. Die stetige Abbildung $\gamma \circ \alpha : [0,1] \times [0,1]^2 \to E$ ist damit eine Homotopie von γ nach $\gamma \circ \sigma$.

3. 2-te Homotopiegruppe vom Kreis

(a) In der Lösung von Serie 4, Aufgabe 3 haben wir folgendes Resultat bewiesen:

Lemma *B*. *Es sei Q ein lokal zusammenhängender Raum, zum Beispiel $Q = [0,1]$ oder $Q = \{*\}$ ein Punkt. Weiter sei $\phi_0 : Q \to S^1$ stetig, $H : [0,1] \times Q \to S^1$ stetig mit $H(0,\cdot) = \phi_0$, $\widetilde{\phi}_0 : Q \to \mathbb{R}$ stetig mit $\pi \circ \widetilde{\phi}_0 = \phi_0$. Dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\widetilde{H} : [0,1] \times Q \to \mathbb{R}$ so dass $\pi \circ \widetilde{H} = H$ und $\widetilde{H}(0,\cdot) = \widetilde{\phi}_0$. Wenn für ein $q \in Q$ die Abbildung $s \mapsto H(s,q)$ konstant ist, so ist auch $s \mapsto \widetilde{H}(s,q)$ konstant.*

Wir wenden Lemma B an, und zwar mit $Q := [0,1]$, $H := \gamma_0$, $\phi_0 \equiv 1$ und $\widetilde{\phi}_0 \equiv 0$. Dieses sagt nun genau dass eine eindeutige stetige Abbildung $\widetilde{\gamma}_0 : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ existiert so dass $\pi \circ \widetilde{\gamma}_0 = \gamma_0$ und $\widetilde{\gamma}_0(0,\cdot) = 0$. Weil $\gamma_0(R) = \{1\}$ muss $\widetilde{\gamma}_0(R) \subset \mathbb{Z}$ sein. Da $\widetilde{\gamma}_0$ stetig und R zusammenhängend ist muss $\widetilde{\gamma}_0|_R$ konstant sein. Mit $\widetilde{\gamma}_0(0,\cdot) = 0$ folgt dass $\widetilde{\gamma}_0(R) = \{0\}$.

(b) Offensichtlich ist $\widetilde{\gamma}_1 \equiv 0$. $\widetilde{\Gamma}(s,\cdot) := (1-s)\widetilde{\gamma}_0 + s\widetilde{\gamma}_1$ $(s \in [0,1])$ definiert eine Homotopie $\widetilde{\Gamma} : [0,1] \times [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ von $\widetilde{\gamma}_0$ nach $\widetilde{\gamma}_1$; in der Tat ist $\widetilde{\Gamma}$ wohldefiniert, stetig, und erfüllt $\widetilde{\Gamma}(\{s\} \times R) = \{0\}$ für $s \in [0,1]$.

(c) Setze $\Gamma := \pi \circ \widetilde{\Gamma}$, wobei $\widetilde{\Gamma}$ die Homotopie von $\widetilde{\gamma}_0$ nach $\widetilde{\gamma}_1$ aus Teilaufgabe b) ist. Offensichtlich ist Γ eine Homotopie von γ_0 nach γ_1.

4. Hopf-Faserung

Schreibe $S^3 := \{(z,z') \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} : |z|^2 + |z'|^2 = 1\}$ und $S^2 := \{(z_0,x_0) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R} : |z_0|^2 + (x_0)^2 = 1\}$.
(a) Offensichtlich ist $F(z,z') \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}$. Wir prüfen für $(z,z') \in S^3$ dass $|F(z,z')|^2 = 1$ gilt. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}|F(z,z')|^2 &= |2z\overline{z'}|^2 + \left(|z|^2 - |z'|^2\right)^2 = 4|z|^2|z'|^2 + |z|^4 - 2|z|^2|z'|^2 + |z'|^4 \\ &= |z|^4 + 2|z|^2|z'|^2 + |z'|^4 = \left(|z|^2 + |z'|^2\right)^2 = 1.\end{aligned}$$

(b) Zuerst beobachte dass wenn $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}$, dann gilt

$$F(\lambda z, \lambda z') = F(z,z') \quad \text{für } (z,z') \in S^3. \tag{1}$$

Fixiere $(z_0,x_0) \in S^2$. Wir suchen alle $(z,z') \in S^3$ so dass

$$F(z,z') \equiv (2z\overline{z'}, |z|^2 - (z')^2) = (z_0,x_0). \tag{2}$$

Betrachte (2) mit $\operatorname{sgn}(z') = 1$, das heisst $z' = |z'| \geq 0$. Dann haben wir gemäss (2),

$$4|z|^2(z')^2 = |z_0|^2, \quad \operatorname{sgn}(z) = \operatorname{sgn}(z_0), \quad |z|^2 = x_0 + (z')^2$$

Insbesondere gilt $4(x_0 + (z')^2)(z')^2 = |z_0|^2$, oder äquivalent,

$$(z')^4 + x_0(z')^2 - \frac{|z_0|^2}{4} = 0,$$

so dass

$$(z')^2 = -\frac{x_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x_0}{2}\right)^2 + \frac{|z_0|^2}{4}} = -\frac{x_0}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Weil $|x_0| \leq 1$ folgt

$$(z')^2 = \frac{1-x_0}{2} \quad \text{und} \quad |z|^2 = x_0 + (z')^2 = \frac{1+x_0}{2}.$$

Damit ist (2) erfüllt mit $(z,z') = \left(\sqrt{\frac{1+x_0}{2}}\operatorname{sgn}(z_0), \sqrt{\frac{1-x_0}{2}}\right)$. Wegen (1) haben wir also

$$F^{-1}\{(z_0,x_0)\} = \left\{\lambda\left(\sqrt{\frac{1+x_0}{2}}\operatorname{sgn}(z_0), \sqrt{\frac{1-x_0}{2}}\right) : \lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}\right\},$$

insbesondere ist $F^{-1}\{(z_0,x_0)\}$ ein Kreis.